# X Topologie 2

## X.A Questions de cours :

1) Soit $A$ une partie de $E$, montrer que $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne.
2) Caractérisation de la continuité des applications linéaires
3) Démontrer la caractérisation de la continuité par les images réciproques des ouverts.

## X.B Exercices :

**Exercice 1: ***

Montrer que la distance d'un élément $x \in E$ à $A$ est nulle si et seulement si $x \in \overline{A}$.

**Exercice 2: *** Sous-groupes de $\mathbb{R}$**

Soit $H$ un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier l'existence de $m = \inf\{x \in H; x > 0\}$.
2. On suppose que $m > 0$. Démontrer que $m \in H$ puis que $H = m\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $m = 0$. Démontrer que $H$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. En déduire que, si $a$ et $b$ sont deux réels non nuls, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.
   On admettra que pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, on a $p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$

**Exercice 3: *****

On pose $A = \{\mathrm{e}^{in} \quad / \quad n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $\overline{A} = U$, l'ensemble des nombres de module 1.

**Exercice 4: ** Deux topologies violemment différentes / deux normes violemment non équivalentes**

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E; f(0) = 0\}$.

1. On munit $E$ de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Démontrer que $F$ est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. On munit $E$ de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$. Démontrer que $F$ est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
3. En déduire que les normes ne sont pas équivalentes

**Exercice 5: *** Densité des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$**

Notons $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices trigonalisables dans $\mathbb{R}$. Alors $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

Si l'élève n'a pas encore vu le cours sur la diagonalisation, trigonalisation il admettre que toute matrice est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

**Exercice 6: ** Densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ qui associe à une matrice le maximum des sommes des valeurs absolues des éléments de chaque ligne de la matrice. Montrer que $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 7: ******

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evndf, soit $F$ une partie fermée de $E$ et $f : F \to F$ une application contractante. Montrer que $f$ admet un unique point fixe.
2. Montrer que le résultat précédent reste valable même si on a seulement $f^p$ est contractante pour un entier naturel $p$.

**Exercice 8: ****

Soit $E$ un espace vectoriel normé, et $V$ un sous-espace vectoriel de $E$.

1. Montrer que $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
2. Montrer que si $\mathring{V} \neq \emptyset$, alors $V = E$.
3. Application 1 : soit $H$ un hyperplan de $E$. Démontrer que $H$ est ou bien fermé ou bien dense dans $E$.
4. Application 2 : soit $A$ une partie de $E$. Démontrer que $\mathrm{vect}(\overline{A}) \subset \overline{\mathrm{vect}(A)}$.

**Exercice 9: ****

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On le muni de la norme infinie.
On considère l'endomorphisme :

$$T \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & \left(Tf : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right) \end{array} \right.$$

1. Montrer que $T$ est un endomorphisme continue de $E$.
2. Est-il injectif ? surjectif ?